УДК 517

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Власова Ю.П.,
научный руководитель профессор Бадуленко Л.Н.
Лесосибирский педагогический институт

При вычислении определенных интегралов используют различные методы. Например, подстановки, неопределенных коэффициентов, интегрирования по частям. Основными подходами не исчерпываются все известные методы вычисления определенных интегралов. Существуют и другие – принципиально иные приемы. В работе рассмотрены приемы вычисления интегралов вида $\int_a^b f(x,\mathrm{m})dx$, (m – некоторый числовой параметр); периодических функций; функций, имеющих на промежутке интегрирования ось или центр симметрии, а также взаимно обратных функций. Сущность приемов представлена в виде таблицы.

№	Функции $f(x)$	Пример	Формула для вычисления интеграла данной функции
1	График $f(x)$ имеет а)ось симметрии 1) $x = 0$	1)Вычислить интеграл $\int_{-1}^{2}(x^3 - 3\,arcsin^{51}x + +7x^4 arctg(\sqrt[5]{5}))dx$	$f(x) -$ *четная.* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
	2) $x = \frac{a+b}{2}$	Решение: Интеграл равен нулю, так как подынтегральная функция нечётная (как сумма нечётных функций), а промежуток интегрирования симметричен относительно точки x = 0.	$\int_{a}^{b} f(x)dx == 2\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)dx$
	б) центр симметрии 1)O(0,0)	2)Вычислить интеграл $\int_{0}^{\pi} arctg(\cos x)dx = 0$	$f(x) -$ *нечетная.* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
	2)$\left(\frac{a+b}{2},0\right)$	$\left[\left(\frac{\pi}{2};0\right) - \textit{центр симметрии}\right]$ Решение: Заметим, что график подынтегральной функции $arctg(\cos x)$ центрально симметричен относительно	$\int_{a}^{b} f(x)dx = 0$
	г) центр симметрии (x,0)	точки $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, абсцисса которой	$\int_{x-a}^{x+a} f(x)dx = 0$

		является серединой сегмента интегрирования $[0, \pi]$. Поэтому интегралы от этой функции по сегментам $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] u \left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$ равны по модулю и противоположны по знаку, а значит, в сумме равны нулю. Итак, искомый интеграл равен нулю.	
2	Периодическая Т – период $f(x)$	Найдите интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{sin^4x + cos^4x}$. Решение: Подынтегральная функция периодична с периодом $\pi/2$, поэтому $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{sin^4x + cos^4x} =$ $= 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{sin^4x + cos^4x} =$ $= 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + tg^2x)dtgx}{1 + tg^4x} =$ $= 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + t^2)}{1 + t^4} dt.$ $I = 2\sqrt{2}.$	$\int_a^b f(x)dx =$ $= \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$ Т – период $f(x)$ <=> 1)$\forall x \in D_f, x \pm T \in D_f$ 2) $f(x + T) = f(x)$
3	Взаимно обратная $y = f(x)$ $x = g(y)$	Вычислить интеграл $\int_0^3 arcsin\sqrt{\frac{x}{1 + x}} dx.$ Решение: Подынтегральная функция $y = arcsin\sqrt{\frac{x}{1 + x}} =$ $= arcsin\sqrt{1 - \frac{1}{1+x}}$	$\int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) -$ $- \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$ где g – обратная для f функция.

		Неотрицательна, дифференцируема и возрастает на сегменте [0, 3] . Выражая из равенства $y = arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ переменную x через y, найдем ее обратную функцию: $g(y) = \frac{sin^2 y}{1-sin^2 y}$. $$\int_0^3 arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx =$$ $= 3 \cdot \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \cdot \arcsin 0 -$ $-\int_0^{\pi/3} \frac{sin^2 y}{1-sin^2 y}dy =$ $= \pi + + \int_0^{\pi/3} \frac{(1-sin^2 y)-1}{1-sin^2 y}dy =$ $= \pi + \int_0^{\pi/3} \left(1 - \frac{1}{cos^2 y}\right) dy =$ $\pi + (y - tgy)\Big|_0^{\pi/3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$	
4	$f(x,m)$, m –числовой параметр. $$\int_a^b f(x,m)dx = J(m)$$	$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx;$$ $$\left[a > 0, b > 0, f(x,b) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}\right] =$$ $= J(b)$. $$J'(b) = \int_0^1 \frac{x^b \ln x}{\ln x}dx = \frac{1}{b+1}$$ $$J(b) = \int \frac{db}{b+1} = \ln(b+1) + C = 0$$ $$[a = b, J(b) = 0, \ln(a+1) + c = 0]$$ $$J(b) = \frac{b+1}{a+1}.$$	$$J'(m) = \int_a^b f(x,m)dx$$ $$J(m) = \int J'(m)dm$$

5	$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx;$ $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n xdx$	Вычислить интеграл $$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx.$$ Решение: $$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx =$$ $$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-1} xsixdx =$$ $$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-1} xdcosx =$$ $$= -sin^{n-1} xcos\, x\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)$$ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2} x(1 - sin^2 x)dx =$$ $$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2} xdx -$$ $$-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx.$$	$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$ – рекурентная формула. 1) n- число четное, n = 2m: $$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \ldots \cdot$$ $$\cdot I_0 = \frac{(2m-1)!!}{2m!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$ 2) n – число нечетное, n = 2m+1: $$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \ldots \cdot$$ $$\cdot I_1 = \frac{2m!!}{(2m+1)!!}$$ но т.к. $$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^0 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$ $$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = 1, \text{то}$$ $$I_{2m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2m} xdx =$$ $$= \frac{(2m-1)!!}{2m!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$ $$I_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2m+1} xdx =$$ $$= \frac{2m!!}{(2m+1)!!}.$$

В заключении следует отметить, что разработка приемов интегрирования специальных классов функций, делает процесс интегрирования понятнее и проще.